

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Nauk Historycznych i Pedagogicznych
Instytut Psychologii

Kacper Maksymiuk

Metapoznawcze Strategie Generowania Pomysłów
Matematycznych

Praca napisana pod kierunkiem
Dr hab. Izabeli Lebudy, Prof. UWR

Wrocław, 2025 rok

Spis treści

1. Streszczenie	4
1. Abstract	4
2. Wstęp.....	6
3. Wprowadzenie teoretyczne	7
3.1. Typy zadań matematycznych i typy myślenia w matematyce	7
3.2. Twórczość i matematyka	8
3.4. Strategie generowania pomysłów	14
4. Metodologia	18
4.1. Badanie pilotażowe.....	18
4.2. Osoby badane	18
4.3. Procedura badania.....	20
4.4. Metody.....	21
5. Wyniki.....	24
5.1. Dane opisowe i interkorelacje	24
5.2. Testowanie różnic między warunkami badania.....	25
5.3. Metapoznawcze strategie generowania pomysłów.....	25
5.4. Dodatkowe analizy o charakterze eksploracyjnym	29
6. Dyskusja	30
7. Bibliografia.....	33

1. Streszczenie

Badanie dotyczyło metapoznawczych strategii dywergencyjnych w twórczości matematycznej. Innymi słowy sprawdzało, w jaki sposób wytwarza się pomysły na rozwiązanie problemów w tej dziedzinie. W badaniu pilotażowym wybrano dwa zadania (geometryczne i z rachunku prawdopodobieństwa), które dzięki ocenie sędziów i sprawdzeniu eksperymentalnemu, najlepiej odzwierciedlały postulaty poprzednich badaczy. Następnie osoby badane ($N = 77$) rozwiązywały je, próbując wygenerować jak najwięcej możliwych rozwiązań w ograniczonym czasie. Podzielono je na dwie grupy. W grupie eksperymentalnej zostały one poproszone o mówienie na głos swoich myśli (procedura *thinkig-aloud*), co było nagrywane, żeby w dalszej kolejności przetworzyć wypowiedzi na transkrypcję i poddać je analizie. Grupa kontrolna pracowała po cichu; u nich przetwarzano tylko zapiski na kartkach. Okazało się, że zależności pomiędzy strategiami generowania pomysłów a miarami twórczości matematycznej (Kattou i in., 2013) zależą od rodzaju zadania. Różniły się one także od wzorów zaobserwowanych we wcześniejszych badaniach prowadzonych na klasycznych zadaniach dywergencyjnych, niezwiązanych z matematyką (Gilhooly i in., 2007). Kolejność używania strategii także różniła się między zadaniami oraz między tym badaniem a poprzednimi (Gilhooly i in., 2007). Okazało się, że w matematyce strategia wywoływania pomysłów na rozwiązanie z pamięci nie pojawiała się u badanych jako pierwsza. Udało się powtórzyć zależność mówiącą o tym, że wraz z generowaniem kolejnych pomysłów ich oryginalność rośnie. Na podstawie wyników badania sugeruje się, że twórcze strategie metapoznawcze zależą od typu zadania, co może stanowić przesłankę na rzecz specyfiki dziedzinowej metapoznania w zadaniach twórczych.

Słowa kluczowe: metapoznanie, metapoznawcza kontrola, strategie metapoznawcze, matematyka, twórczość matematyczna, myślenie dywergencyjne.

1. Abstract

The study explored metacognitive divergent strategies in mathematical creativity. In other words, it examined how are the ideas for solving mathematical tasks generated. In the pilot study, two tasks (in geometry and probability) were selected to suit the researcher's recommendations. To this end the judges' evaluation and an experimental testing were run. Then, the participants ($N = 77$) solved those tasks trying to generate as many solutions as possible in a limited time span. They were divided into two groups. In the experimental group

the Thinking Aloud procedure was run. The subjects' speeches were recorded for the transcriptions needed for the further analyses. The control group worked without speaking. It turned out that the relationships between divergent strategies and the measures of mathematical creativity (Kattou et al., 2013) depends on the type of given task. They also differed from the patterns observed in the previous studies unrelated to mathematics (Gilhooly et al., 2007). The order of the strategies also differed between this study and the previous ones (Gilhooly et al., 2007). The strategy of using the memory for generating solutions wasn't used first. The relationship in which the originality increases with every idea was observed. Based on the results of the study, it is suggested that the creative metacognitive strategies depend on the type of task and may be an argument in favour of the domain specificity of metacognition in creative tasks.

Keywords: metacognition, metacognitive control, metacognitive strategies, mathematics, mathematical creativity, divergent thinking.

2. Wstęp

Badanie, które tutaj prezentuję, wynikało z tego, jak rozumiem miejsce psychologii — nauki badającej to, co — powiedzmy metaforycznie — dzieje się w głowie. Wierzę, że poznanie naukowe i wiedza mają wartość samą w sobie. Dlatego chciałem sprawdzić, co się dzieje w głowie osób rozwiązujących zadania matematyczne. Wybrałem matematykę, ponieważ jest to niezwykła dziedzina, w której umysł człowieka wspina się bodaj na wyżyny swoich możliwości — przez niektórych uważana za sztukę. Dla nas w każdym razie służąca do naukowego opisu świata.

Mój eksperyment sprawdzał, w jaki sposób wytwarza się pomysły na rozwiązanie zadań matematycznych. Chciałem sprawdzić, czy powtórzą się wzorce, które zaobserwowano w zadaniach twórczych ale niezwiązanych z matematyką (Gilhooly i in, 2007), oraz czy będą one niezależnie od typu zadania. Najpierw więc opisuję typy zadań w matematyce w naukowym opracowaniu. Następnie dokładniej omawiam składowe myślenia twórczego, przechodząc do tego, jak się ono przejawia w matematyce. Dalej przedstawiam metapoznanie, które można nazwać myśleniem o myśleniu, po czym wymieniam dotychczasowe badania na temat metapoznawczych strategii.

Chciałbym w tym miejscu podziękować wszystkim, bez których to badanie by nie dotarło do końca — za pomoc i życzliwość. Dziękuję naprzód pani dr hab. Izabeli Lebudzie, prof. UW, niemniej gorąco ślę podziękowania Paulinie Nawrockiej, Barbarze Borowiak, Magdalenie Woźniak i Tomaszowi Pachnowskiemu, a także wszystkim sędziom kompetentnym, tym, z którymi dyskutowałem, naradzałem się i których badałem w badaniu pilotażowym i badaniu właściwym.

3. Wprowadzenie teoretyczne

Matematyka jest sztuką wyciągania prawidłowych wniosków z zadanych przesłanek (Encyclopedia Britannica 2024). Na przykład, ponieważ boki prostokąta są do siebie prostopadłe, można wymnożyć ich długości przez siebie, żeby uzyskać pole całej figury. Tak sformułowana definicja matematyki podkreśla wysoki rygor logiczny, jaki w niej panuje — a jednak jest w tej dziedzinie miejsce na niezwykle różnorodne procesy myślowe. W tej pracy chciałbym opisać twórczość matematyczną. W dużej mierze to od typu problemu (zadania) zależy, jaki rodzaj myślenia będzie potrzebny do jego rozwiązania. Dlatego w pierwszej kolejności omówię różne typy zadań matematycznych. Szczególnie uwzględnię zadania otwarte, ponieważ większość z nich wymaga myślenia twórczego (Kattou i in., 2013).

3.1. Typy zadań matematycznych i typy myślenia w matematyce

W literaturze naukowej można znaleźć podział zadań na zamknięte i otwarte (Kattou i in., 2013; Sak i Maker, 2006). Pierwsze z nich polegają na wyborze poprawnej odpowiedzi spośród podanych i najczęściej mają jedną metodę wykonania. Wprawdzie obliczenia da się w nich zapisać na różne sposoby, jednak są one sobie tożsame (np. dzielenie przez 2, mnożenie przez $\frac{1}{2}$ lub przez 0,5). Zadania zamknięte wymagają znajomości określonego schematu do poprawnego ich wykonania. Zgodnie z wcześniej wspomnianą definicją matematyki (Encyclopedia Britannica 2024) z przesłanek wyciąga się jednoznaczne wnioski, a z nich dalsze — i takie wynikanie kontynuuje się aż do rozwiązania (Kattou i in., 2013). Z badań wynika, że myślenie w tych zadaniach można opisać jako: indukcyjno-dedukcyjne, eksploracyjne, postępujące liniowo, szukające jednej, poprawnej odpowiedzi, która od początku jest jasno zarysowana (Kattou i in., 2013). Takie myślenie nazywa się w literaturze myśleniem konwergencyjnym (Lin, 2023; Kattou i in., 2013; Tan i Sriraman, 2017).

Zadania otwarte są zróżnicowane ze względu na sposób ich rozwiązywania. Istnieją wśród nich takie, które od zamkniętych odróżnia jedynie brak podanych odpowiedzi do wyboru. Sposób rozwiązania jednak jest identyczny, ściśle konwergencyjny. Natomiast należą do tej kategorii także problemy twórcze. Uчени podkreślają, że twórczość jako taka (*domain-general creativity*) pojawia się tylko w pewnych, określonych sytuacjach problemowych. Takich, gdzie sposób przejścia od punktu wyjścia do punktu dojścia nie jest wcale oczywisty,

narzucający się (Lin, 2023, za de Vink i in., 2023; Guilford, 1967, za: de Vink i in., 2023; Torrance, 1988, za: de Vink i in., 2023). Trzeba w tym wypadku wymyślić nową metodę. W matematyce ma to miejsce, kiedy z przesłanek można wywnioskować cały szereg zależności, lecz nie każda z nich prowadzi do postępu w rozwiązaniu. Struktura takiego zadania jest złożona lub nietypowa i wymaga przemyślenia całości problemu, wygenerowania szeregu możliwych rozwiązań i na koniec jednoznacznego rozstrzygnięcia (Lin, 2023). Myślenie ma więc tu charakter generatywny, nieliniowy, polega na szukaniu różnych możliwości. W literaturze określa się je jako dywergencyjne i często utożsamia się z myśleniem twórczym (Balka, 1974; Imai, 2000; Kattou i in., 2013). Należy jednak pamiętać, że matematyka jest dziedziną, gdzie niezależnie od zadania myślenie konwergencyjne jest konieczne (de Vink i in., 2022). Dywergencja używana jest do szukania pomysłów na rozwiązanie zadania. Jednak rozwiązywanie zadania samo z siebie jest jednoznaczne i liniowe.

3.2. Twórczość i matematyka

Pojęcie twórczości w języku potocznym jest wieloznaczne, dlatego jako termin naukowy wymaga uściślenia. Różne skojarzenia wiążą się ze słowami: *twórczość*, *twórcza osoba*, *twórcze* podejście itd. Podobnie w języku angielskim (który jest na ogół stosowany w psychologii) *creativity* jest wyrazem wieloznacznym. Jednak wspólnym mianownikiem wszystkich terminów wspomnianych wcześniej są dwa aspekty: nowość i użyteczność. To one definiują twórczość w rozumieniu naukowym (Runco i Jaeger, 2012). Jeśli jest coś już znane, nie nazwiemy tego *twórczym*, ponieważ jest to właśnie *odtwórcze*. Podobnie jeśli coś nie ma wymiernej wartości (czy to estetycznej czy praktycznej, czy poznawczej), trudno widzieć w tym coś twórczego (Nęcka, 2001). Możemy też odwoływać się do różnych poziomów twórczości: do tej przez wielkie „T” (jak epokowa poezja Cz. Miłosza, matematyczne i fizyczne odkrycia H. Poincarego) oraz do tej, która jest powszechnością każdego człowieka, pisaną przez małe „t” (Kaufman & Beghetto, 2009). W niniejszej pracy skupiam się na tej przyziemnej twórczości matematycznej zwykłych ludzi, ponieważ u jej podstawy leżą te same procesy poznawcze, co przy wielkich odkryciach (Weisberg, 1986, za: Nęcka, 2001). Kryteria dla tego poziomu twórczości są bardziej względne. Pomysły nie muszą być tu rewolucyjnie nowe, wystarczy, że dla kogoś takie będą. Na przykład w moim badaniu sam poziom zadania będzie wymuszał wymyślanie pomysłów (tj. wytwarzanie nowych), a nie odtwarzanie ich z pamięci.

Na samym polu psychologii matematyki pojawiło się przeszło sto definicji twórczości (Mann, 2006), dlatego odniosę się do tych najczęściej przytaczanych we współczesnej literaturze. Jednym z pierwszych badaczy twórczości matematycznej był radziecki uczony Wadim Krutecki. Twierdził, że polega ona na umiejętności formułowania problemów matematycznych (*problem finding/problem formation*), rozwiązywania ich (*problem-solving*), a także na wynalazczości (*inventing*), niezależności (*independence*) i oryginalności (*originality*) (Krutecki, 1976). Niestety Krutecki nie miał dostępu do zachodnich postępów w badaniu twórczości, dlatego jego teoria nie przystaje do pojęć twórczości J.P. Guilforda (1959, za: Mann, 2005) czy Torrance’a (1966, za: Mann, 2005). Ponadto Krutecki stosował wymiennie pojęcie twórczości matematycznej oraz uzdolnień matematycznych (Haylock, 1997). Dziś są to dwie różne zmienne choćby dlatego, że w uczniowie książkowo zdolni różnią się od tych twórczo-matematycznie uzdolnionych (Hong i Aqui, 2004; Leikin i Lev, 2013; Mann, 2006). Na podstawie wyników w odpowiednich typach zadań da się wykreślić takie różniące się profile tych dwóch grup. Uczniowie kreatywnie myślący wykazują się głębszym rozumieniem fundamentalnych pojęć matematycznych oraz chętniej podejmują ryzyko w zadaniach i poświęcają na nie więcej czasu (Mann, 2006). Twórczość matematyczna ma też związek z motywacją do rozwiązywania zadań i z radością z tej czynności (Haavold, 2018). Co więcej, za poziom twórczości matematycznej w 9% odpowiadają zmienne osobowościowe (Meier i in., 2024). Do tych istotnie predyktywnych należą ugodowość, niska neurotyczność oraz psychopatia. Ta ostatnia cecha ma także zbadane związki z twórczością naukową i artystyczną (Lebuda i in., 2021). Jednakże, odmiennie niż w innych dziedzinach twórczych, nie wykryto związków twórczości matematycznej z otwartością (Meier i in., 2024). Ocena własnej twórczości matematycznej najsilniej wiązała się z poziomem tej twórczości (Meier i in., 2024). W przypadku zwykłych zdolności matematycznych zdaje się, że jest inaczej. Postrzegana własna zdolność matematyczna jest silniej związana z lękiem matematycznym (*math anxiety*) niż z faktycznym poziomem tych zdolności (Sokolowski i in., 2019; za: Desender i Sasanguie, 2022). Zatem twórczość matematyczna jest specyficzną zdolnością, odróżnialną od innych ważnych matematycznie — i nie można, jak u Kruteckiego, używać pojęć twórczości matematycznej i uzdolnienia zamiennie.

Don S. Balka (1974) pierwszy odniósł zagadnienie twórczości matematycznej do paradygmatu Guilforda (1959, za: Mann, 2005) i Torrance’a (1966, za: Mann, 2005). Jego zdaniem twórczość matematyczna opiera się zarówno na konwergencyjnym jak i dywergencyjnym myśleniu (Balka, 1974). To pierwsze jednak rozumiał specyficznie, nie

tylko jako wykorzystywanie wyuczonych wzorów rozwiązywania zadania, lecz również jako wyłamywanie się wypracowanym nastawieniem (*breaking from established mindsets*; Balka, 1974). Natomiast co do dywergencyjnego myślenia postulował za Guilfordem i Torrancem, żeby mierzyć je za pomocą następujących zmiennych: płynności (*fluency*), która jest rozumiana jako liczba wygenerowanych pomysłów, oryginalności (*originality*) oznaczającej liczbę pomysłów rzadkich oraz giętkości (*flexibility*) oznaczającej liczbę różnych od siebie kategorii, do których można przyporządkować pomysły (Kattou i in., 2013). Balka stworzył metodę CAMT (*Creative Ability in Mathematics Test*), pierwszy test do pomiaru matematycznej twórczości na wzór takich metod jak AUT (*Alternative Uses Test*) czy RAT (*Remote Associates Test*). Jest on używany także obecnie, choć nie należy już do najpopularniejszych metod (Leikin i Sriraman, 2022).

Derek W. Haylock (1987) również wskazywał na to, że twórczość matematyczna skupia się na dywergencyjnym generowaniu pomysłów (u niego właściwie: *divergent production*) oraz na zwalczaniu sztywności myślenia. Jego konceptualizacja była próbą pogodzenia bardzo wielu dotychczas wypracowanych definicji. Cytując Balkę, postulował, żeby mierzyć dywergencyjne generowanie pomysłów takimi wskaźnikami jak płynność, giętkość oraz oryginalność (Haylock, 1984, 1987, 1997). Jednocześnie wskazywał za Kruteckim, żeby testować je w kontekście rozwiązywania problemów matematycznych oraz formułowania ich (Haylock, 1984, 1987, 1997). Ważnym punktem w jego modelu była zapożyczona od Wallasa (1926) charakterystyka procesu twórczego. W myśl tej koncepcji, proces twórczy składa się z fazy inkubacji (dojrzewania pomysłów), iluminacji (uzyskania wglądu w zadanie, odkrycia rozwiązania) oraz weryfikacji. Haylock stwierdził, przejście z fazy inkubacji do fazy iluminacji blokuje sztywność myślenia — stan poznawczy, w którym ktoś automatycznie myśli o danej rzeczy w tylko jeden, narzucający się sposób (Luchins, 1942). Innymi słowy sztywność myślenia uniemożliwia odnalezienie rozwiązania. Autor powoływał się przy tym na niektórych wielkich matematyków, którzy, jak na przykład Poincaré, sami odnosili się do modelu Wallasa (Haylock, 1984).

Modele Balki i Haylocka dały początek empirycznym dociekaniom, które nie tylko pozytywnie je zweryfikowały, ale dodały do nich ważne szczegóły. Dowiedziono między innymi, że w matematyce szczególne znaczenie ma myślenie konwergencyjne (de Vink i in., 2023) — niezależnie od rodzaju zadania. Stwierdzono też, że na ogólną zdolność matematyczną składają się zdolności przestrzenne, liczbowe, indukcyjno-dedukcyjne (tożsame z konwergencją) oraz myślenie dywergencyjne mierzone płynnością, giętkością

i oryginalnością (Kattou i in., 2013). Udało się również potwierdzić, że zwalczanie sztywności poznawczej wiąże się z wyższym wynikiem w zadaniach (Imai, 2000). Jednocześnie okazało się, że rola dywergencji w matematyce jest mniej oczywista. Mianowicie stwierdzono, że sam poziom myślenia dywergencyjnego nie pozwala przewidzieć poziomu wykonania zadania matematycznego (de Vink i in., 2023). Także poziom zdolności dywergencyjnych nie kompensował poziomu myślenia konwergencyjnego — jeśli był on zbyt niski (de Vink i in., 2022). Dopiero zakładając choć przeciętny poziom myślenia konwergencyjnego, pojawiał się dodatni wpływ zdolności dywergencyjnych na wynik w matematycznym teście (de Vink i in., 2022). Autorzy sugerowali wprawdzie, że te wnioski mogą być skutkiem źle dobranych zadań, jednak przytaczali raporty z innych eksperymentów, których wyniki były podobne (Huang, Peng, Chen, Tseng i Hsu, 2017, za: de Vink i in., 2023). Tę zależność myślenia dywergencyjnego od tego konwergencyjnego można tłumaczyć tym, że nawet jeśli w zadaniu trzeba wymyślić rozwiązanie (dywergencja), same wnioski są wyciągane w sposób dedukcyjny (konwergencja). Rzeczywiście wykazano, że poziom twórczości matematycznej da się w istotny sposób wyjaśnić przez same zdolności matematyczne (Haavold, 2018). Co więcej, twórczość matematyczna posiada umiarkowanie silny związek ze sprawnością obliczeniową (*arithmetic fluency*; Meier i in., 2024). Jednym słowem podsumowując, teorie Balki i Haylocka, uwzględniające zarówno konwergencję jak i dywergencję w twórczości matematycznej są zgodne z obecnym stanem badań.

Twórczy proces matematyczny ma jeszcze jedną ważną cechę wspólną z innymi procesami twórczymi. Składa się z faz, gdzie kolejno generuje się surowy pomysł (strukturę przedtwórczą, *preinventive structure*) i eksploruje możliwe jej zastosowania w ramach ograniczeń, które daje sytuacja lub zadanie (Finke i in., 1992). Po wstępnej eksploracji dana struktura przedtwórcza, która pierwotnie nie miała żadnej funkcji, była wyabstrahowanym pomysłem, może zostać przekształcona. To przekształcenie natomiast może powodować dalszą eksplorację zastosowań i zmianę ograniczeń (Finke i in., 1992). Podczas weryfikacji empirycznej modelu okazało się, że wcale nie dobra znajomość problemu daje najbardziej twórcze efekty — bo je właśnie hamuje (Finke, 1990). Twórczość pomysłów wtedy jest największa, kiedy najpierw swobodnie generuje się nowe pomysły bez narzuconej interpretacji co do ich użyteczności czy ograniczeń zadania, a dopiero potem eksploruje się zastosowania tak wytworzonych struktur przedtwórczych (Finke, 1990). Przywodzi to na myśl tezę Ludwika Flecka o tym, że fakty (naukowe i nie tylko) powstają i rozwijają się (Fleck, 1986). W myśl tej teorii człowiekowi nie są dostępne żadne bezpośrednio dane fakty, których wnioski nasuwają

się samoistnie (Fleck, 1986; Sady, 2010). Przeciwnie, Fleck, odwołując się do przebiegu rewolucji kwantowej, omawia, jak pomysł bez zastosowania i interpretacji jest najwyżej ciekawostką (Fleck, 1986; Sady, 2010) — co wpisuje się w język modelu genploracji (Finke i in., 1992). To obrazuje, dlaczego proces twórczy w matematyce jest zrazem dywergencyjny i konwergencyjny; wytwarza surowe pomysły, tj. struktury przedtwórcze i luźno eksploruje zastosowania — po czym konwergencyjnie, przyczynowo-skutkowo wnioskuje o ograniczeniach. Rodzi to ważny wniosek metodologiczny o tym, że badając twórczość matematyczną należy brać pod uwagę wszystkie pomysły: te luźno rzucone i te dobrze wyartykułowane, niezależnie od poprawności czy oceny przydatności z perspektywy badacza. Owszem, w matematyce ograniczenia, wiedza i myślenie konwergencyjne są pierwsze względem dywergencji, co pokazały wcześniej omówione badania (de Vink i in., 2022). Jednak te wyniki wcale nie przekreślają tego, że proces twórczy w matematyce to nieraz droga wiodąca przez wiele błędnych pomysłów.

3.3. Metapoznanie w zadaniach twórczych

Myślenie może przebiegać na wielu poziomach, a jego przedmiotem może być także sam proces myślenia i wówczas nazywamy je metapoznaniem (Efklides, 2008; Flavell, 1979). Zachodzi ono między innymi podczas: uczenia się i zapamiętywania (Ackerman & Thompson, 2014; Metcalfe & Finn, 2008), rozwiązywania zadań matematycznych (Muncer i in., 2022; Veenman & Van Cleef, 2019) oraz twórczego myślenia (Mevarech & Amrany, 2008; Lebuda & Benedek, 2023). Dostępne modele teoretyczne metapoznania są zasadniczo zbieżne ze sobą jeśli chodzi o ich składowe. Ponieważ moja praca dotyczy generowania pomysłów na rozwiązanie zadania matematycznego (dywergencji), będę używał modelu twórczego metapoznania (Lebuda i Benedek, 2023). Wyróżnia on metapoznawczą wiedzę o twórczych procesach poznawczych, ich metapoznawcze monitorowanie oraz metapoznawczą kontrolę (Lebuda i Benedek, 2023). Model opisuje te metapoznawcze procesy na trzech poziomach: na poziomie samego zadania, jego wykonywania oraz rezultatów (Lebuda i Benedek, 2023). Autorzy zakładają, że biorą one udział nie tylko w trakcie rozwiązywania twórczego zadania, lecz także przed nim i po jego zakończeniu (Lebuda i Benedek, 2023).

Metapoznawcza wiedza na poziomie zadania obejmuje znajomość poszczególnych zadań wymagających procesu twórczego (Lebuda i Benedek, 2023). Natomiast na poziomie strategii odnosi się do informacji o tym, skąd bierze się pomysły. Zatem obejmuje zarówno

znajomość strategii twórczego myślenia, jak i tego, jak daną strategię po kolei wykonuje się poznawczo, jak trzeba wtedy myśleć (Lebuda i Benedek, 2023). Niestety na tym poziomie można napotkać wiele błędnych przekonań na temat twórczości (Benedek i in., 2021) — jak choćby to, że pierwsze pomysły są najlepsze, a te późniejsze, są mniej twórcze (Lebuda i Benedek, 2023). Miarą tych błędnych przekonań są też właśnie różnice w używanych strategiach twórczych pomiędzy osobami biegłymi i niebiegłymi w danej twórczej dziedzinie (Mevarech i Amrany, 2008; Peskin i Ellenbogen, 2019). Metapoznawcza wiedza na poziomie rezultatów odnosi się do tego, kiedy wynik procesu poznawczego można opisać jako twórczy. Co ważne, wraz z doświadczeniem w twórczych zadaniach rośnie umiejętność trafnej oceny twórczości i oryginalności pomysłów, rośnie więc metapoznawcza wiedza w tym zakresie (Lebuda i in., 2024; van Broekhoven i in., 2022).

Kolejną składową modelu jest metapoznawcze monitorowanie; opisuje się je jako te czynności umysłowe, które oceniają twórcze procesy poznawcze (Lebuda i Benedek, 2023). Ponownie ma to miejsce na trzech poziomach. Na poziomie zadania jest to ocena tego, czy zadanie będzie trudne albo czy brzmi znajomo (Lebuda i Benedek, 2023). W tym miejscu widać, że dla tej oceny potrzebna jest metapoznawcza wiedza na poziomie zadania. Model zakłada dynamiczną współzależność jego części składowych. Co do poziomu wykonania metapoznawcze monitorowanie polega na ocenie procesów poznawczych zaangażowanych w rozwiązywanie twórczego zadania (Lebuda i Benedek, 2023). Te oceny mogą jednak nie być trafne (Lebuda i in., 2024). Dostępne dane dostarczają wiedzy o szeregu czynników wpływających na monitorowanie metapoznawcze, jak na przykład pewność siebie, lęk matematyczny (*math anxiety*), czy nawet to, czy polecenie jest napisane czytelnie czy nie (Ackerman i Thompson, 2014; Desender i Sasanguie, 2022; Metcalfe i Finn, 2008; Puente-Díaz, 2023; Reder & Ritter, 1992). Tu także znów wpływ na ocenę własnych pomysłów i własnego wykonywania twórczych zadań zależy mocno od tego, co zawiera się w swojej metapoznawczej wiedzy. Jak wspomniałem osoby o wyższym poziomie twórczości trafniej oceniają własne pomysły (Ceh i in., 2022; van Broekhoven i in., 2022). Jednakże, co pokazały nowsze badania, osoby te mimo tego nie doceniają swojej twórczości, a przeceniają ją u innych (Lebuda i in., 2024). Badania te odnoszą się bądź do metapoznawczego monitorowania na poziomie wykonania bądź na poziomie rezultatów. Ocena własnych pomysłów w procesie twórczym ma wiele wspólnego z oceną własnych poczynań na tym polu, co zaznaczali chociażby Lebuda i in. (2024).

Na podstawie dostępnej wiedzy metapoznawczej dokonuje się ocena zadania, jego wykonania i rezultatów poprzez metapoznawcze monitorowanie. Zależnie od tego przewidywania można więc zaangażować się w nie albo nie decydować się na jego rozwiązanie. To nazywa się w literaturze metapoznawczą kontrolą, a zatem są to działania na twórczych procesach poznawczych regulujące je (Lebuda i Benedek, 2023; Benedek i Lebuda, 2024). Ponownie, rozpatrując ten komponent na trzech poziomach — na poziomie zadania jest to właśnie decyzja i manipulacja zasobami oraz procesami poznawczymi na ile angażować się w działanie. W twórczych zadaniach jest to ważna funkcja trudniej jest w nich powiedzieć, kiedy już wypracowało się zadowalające rozwiązanie, niż w zadaniach konwergencyjnych (Lebuda i Benedek, 2023; Nęcka, 2001). Można tu przykładowo zdecydować się na zapisanie danego pomysłu, na jego dopracowanie lub zapomnienie o nim. Nie ma jasno określonych wskazówek, czy pomysły już wytworzone są dostateczne. O ile więc to metapoznawcze monitorowanie ocenia twórcze pomysły i własne wykonywanie zadania, to na tej podstawie metapoznawcza kontrola może zakończyć procesy generowania pomysłów. Na poziomie rezultatów metapoznawcza kontrola polega na nadzorowaniu procesów poznawczych właśnie na samym pomysle, wyniku myślenia twórczego. Jednak to poziom wykonania metapoznawczej kontroli jest dla mojego badania szczególnie ważny do omówienia. Dotyczy mianowicie strategii, biorących udział w egzekwowaniu procesów poznawczych w rozwiązywaniu zadań twórczych. Tym strategiom poświęcę osobną część pracy

3.4. Strategie generowania pomysłów

Osoby efektywne w myśleniu dywergencyjnym stosują na ogół większą liczbę metapoznawczych strategii generowania pomysłów (Jia i in., 2022). Ta zależność występuje także w szczególnym przypadku matematyki (Hong i Aquí, 2004). Co więcej, istnieją już programy efektywnie trenujące w wykorzystaniu takich strategii metapoznawczych (Mevarech, 1999; Mevarech & Amrany, 2008)

Z dostępnych badań wynika, że strategie twórcze da się poszeregować na cztery kategorie (Gilhooly i in., 2007; Jia i in., 2022). Są nimi: szukanie w pamięci (przykład typowy z *Alternative Uses Task*: kiedyś widziałem, że ktoś użył cegły do podtrzymania drzwi) odnoszenie danego przedmiotu do szerszej kategorii (np. but jest rodzajem ubrania, więc można dać go strachowi na wróble), użycie własności przedmiotu (doniczka jest twarda, więc dobrze się sprawdzi jako przycisk do papieru) oraz rozkład przedmiotu na części (z drabiny da się

urwać łańcuch, z którego zrobię biżuterię). Wszystkie razem są dość powszechne i zazwyczaj występują w pewnej określonej kolejności (Gilhooly i in., 2007; Shaw i in., 2024). Najpierw wywołuje się pomysły z pamięci, a gdy ten zasób zdaje się kończyć, wtedy używa się trzech pozostałych strategii (Gilhooly i in., 2007). Znamienne jest też to, że z czasem z jednej strony rośnie oryginalność pomysłów (efekt kolejności), a z drugiej maleje liczba podawanych pomysłów (Beaty i Silvia, 2012; Shaw i in., 2024). Zatem te trzy kolejne strategie generują mniej pomysłów niż wywoływanie z pamięci (Gilhooly i in., 2007). Jednakże te przypominane pomysły nie są twórcze (Gilhooly i in., 2007). Od pozostałych strategii jest też znacznie częściej angażowana. Częstsze wykorzystywanie strategii właściwości danego przedmiotu nie wiąże się ani z większą liczbą pomysłów, ani z wyższym wskaźnikiem ich twórczości (Gilhooly i in., 2007). Natomiast zarówno osadzanie przedmiotu w szerszej kategorii jak i jego podział na części posiadają umiarkowanie silny związek z twórczością podanych pomysłów, jednak, jak zaznaczałem, nie wiążą się z liczbą zgłoszonych pomysłów (Gilhooly i in., 2007). Może to być spowodowane tym, że zwyczajnie szybciej jest coś wydobyć z pamięci niż samemu wymyślić. Z drugiej strony mówi się także o tym, że podejście twórcze wymaga od uwagi wstrzymania od stosowania tego, co się zna (Mednick, 1962). To powstrzymywanie ma obciążać uwagę i tym samym hamować płynność generowania.

Strategie, o których piszę, badano jednak tylko dla ogólnej twórczości (*domain-general creativity*). W specyficznym kontekście matematyki według mojej wiedzy nie badano dotąd metapoznawczych strategii generowania pomysłów. Jak to opisałem, udało się określić udział myślenia dywergencyjnego w procesie rozwiązywania zadań i korelaty matematycznej twórczości. Wiadomo także, że i w matematyce występuje efekt kolejności (Shaw i in., 2024). Co więcej, zależność oryginalności pomysłu od czasu lepiej opisuje model sześcienny niż kwadratowy — inaczej niż w dotychczasowych badaniach (Shaw i in., 2024). Należy przez to rozumieć, że wykres oryginalności najpierw rośnie, potem się wypłaszcza, żeby na koniec znów rosnąć (zależność sześcienna), a nie maleć (zależność kwadratowa). Autorzy jednak podkreślają, żeby ostrożnie traktować tę część ich badania. Najoryginalniejsze i ostatnie zarazem pomysły wygenerowała mała część badanych, która w ogóle była w stanie podać dostatecznie dużo pomysłów (Shaw i in., 2024). Dlatego na ponowne uniesienie się wykresu przekładają się wyniki nominalnie 8 badanych ze 150 (Shaw i in., 2024).

Istnieje szereg badań w zakresie metapoznawczych strategii w rozwiązywaniu zadań matematycznych (Mevarech, 1999; Mevarech i Amrany, 2008; Mevarech & Kramarski, 2003). Tutaj ponownie wyszczególniono 4 strategie. Pierwszą z nich jest próba zrozumienia problemu

i polega między innymi na wypisaniu wszystkich danych oraz próbie ich poznawczego przekształcenia, mając na uwadze cel zadania (Mevarech i Kramarski, 2003). Idzie po linii pytań: na czym polega zadanie; o co się mnie pyta; co znaczą dostarczone w treści dane (Mevarech i Kramarski, 2003). Jest to strategia dużo częściej stosowana przez osoby niepoddane metapoznawczemu treningowi niż przez uczniów po specjalnym treningu (Mevarech i Amrany, 2008). Osoby po tym treningu uzyskały w tym samym badaniu wyższe wyniki w teście matematycznym treningu (Mevarech i Amrany, 2008) — co może sugerować, że jest to mało skuteczna metoda. Jednak autorzy nie analizowali bezpośrednio zależności między używaniem tej strategii a wynikiem w teście matematycznym, dlatego jest to zaledwie sugestia pewnej zależności, nie zaś dowód empiryczny. Drugą strategią jest szukanie podobieństw pomiędzy danym zadaniem i tymi, które już się rozwiązało (Mevarech i Kramarski, 2003). Występuje stosunkowo rzadko u uczniów bez specjalnego treningu (Mevarech i Amrany, 2008). Trzecia strategia polega na świadomym konstruowaniu taktyki na rozwiązanie zadania; idzie po linii pytań: *jak* (jak można to rozwiązać), *dlatego* (dlaczego ta strategia będzie najodpowiedniejsza) oraz *w jaki sposób* (w jaki sposób przekształcić dane, żeby rozwiązać problem; Mevarech i Kramarski, 2003). Ostatnią strategią było sprawdzanie swoich działań pod kątem sensowności i tego, czy wiodą one do rozwiązania zadania (Mevarech i Kramarski, 2003). Te strategie jednak, jak to opisuję, są skoncentrowane na konwergencyjnym myśleniu. Bardziej opisują, jak uczniowie osiągają wgląd w zadanie i jak z poziomu metapoznawczej kontroli nadzorują swoje działania w zadaniach matematycznych, niż odpowiadają na pytanie, skąd uczniowie biorą matematyczne pomysły.

Sugeruje się, że można z pewnym powodzeniem przenosić wnioski z ogólnych badań nad dywergencyjnym myśleniem do tych osadzonych w kontekście matematyki (Shaw i in., 2024). Dlatego w swoim badaniu chciałem sprawdzić występowanie w myśleniu matematycznym wymienionych strategii generowania pomysłów, to jest: wywoływania z pamięci, odnoszenia danego przedmiotu do szerszej kategorii, skupiania się na cechach przedmiotu oraz rozkładu przedmiotu na części. Każda z nich jest adaptowalna do kontekstu matematyki. Wywoływanie z pamięci wydaje się tu nie wymagać omówienia. Odnoszenie danego przedmiotu do szerszej kategorii to przykładowo stwierdzenie: wzór funkcji jest rodzajem równania, można więc podstawić pod odpowiednie niewiadome dane, żeby coś uzyskać. Skupianie się na cechach przedmiotu to przykładowo następujący pomysł: ponieważ trójkąt jest równoramienny, kąty przy podstawie są równe. Rozkład przedmiotu na części

wyobrażam sobie jako przykładowo: podzielenie czworokąta niepodaną w treści zadania przekątną, żeby policzyć kąty w uzyskanym trójkącie.

4. Metodologia

Badanie było prerejestrowane. Wszystkie materiały i instrukcje użyte do badania oraz do analiz są dostępne w bazie *OSF* dostępnego pod poniższym linkiem. Załączyłem tam również zaświadczenie o prerejestracji badania, transkrypcje i opisane bazy danych, których użyłem do analizy. Link do bazy:

https://OSF.io/trsbox/?view_only=cc17ac50316044d08aec747a2b4dc0c9

4.1. Badanie pilotażowe

Przed badaniem właściwym przeprowadziłem pilotaż celem wyłonienia zadań do właściwej części badania. Szczegółowo opisuję jego procedurę w aneksie 1 do artykułu dostępnego w bazie *OSF* pod linkiem powyżej. Chciałem, żeby zadania, na których przeprowadzę badanie, były z prawdziwej, szkolnej rzeczywistości uczniów i jednocześnie żeby wymagały kreatywności. Wybrałem wszystkie otwarte zadania z geometrii płaskiej oraz z rachunku prawdopodobieństwa, jakie znalazły się na polskich egzaminach końcowych po szkole średniej w latach 2016-2023. Następnie 13 sędziów kompetentnych wyłoniło po 2 zadania z geometrii i z rachunku prawdopodobieństwa na podstawie tego, czy zadanie brzmiało na wyzwanie. Następnie przebadalem ośmioro badanych, dając czworgu jedną parę zadań (geometryczne i rachunek prawdopodobieństwa) i czworgu drugi komplet. Badałem ich, używając procedury głośnego myślenia (*thinkig-aloud*) opisanej poniżej. Następnie policzyłem, ile pomysłów matematycznych badani wygenerowali w tych dwóch zestawach zadań. Na tej podstawie zdecydowałem o tym, które zadanie geometryczne i które zadanie z rachunku prawdopodobieństwa będzie użyte we właściwej części badania. Wypowiedzi badanych z tej części badania są dostępne w bazie *OSF*.

4.2. Osoby badane

Badanie przeprowadzono na przełomie marca i kwietnia 2025 roku we Wrocławiu. Wzięło w nim udział 77 osób — 43 osób w grupie eksperymentalnej i 34 kontrolnej. Prerejestracja zakładała po 40 osób w obu grupach, ponieważ replikuję badanie Gilhooly’ego i współpracowników (2017), więc chciałem dobrać tak samo liczną próbę. Jednak przez problemy techniczne, które zniszczyły nagrania niektórych badanych, do badania zaprosiliśmy

dodatkowe osoby. Ze względu na możliwości czasowe w grupie kontrolnej nie udało się zebrać wymaganej liczby osób. 7 osób badanych z grupy eksperymentalnej zostało wyłączonych z analizy różnic pomiędzy grupą kontrolną i eksperymentalną poprzez brak danych (nie zapisała się dokumentacja tego, co badani pisali na kartkach w trakcie badania; byli to badani numer 1, 19, 31, 35, 36, 39, 41). Z kolei z analiz, które testowały hipotezy, wyłączono 4 badanych z grupy eksperymentalnej ze względu na brak danych (oprogramowanie wadliwie zapisało nagrania, przez co nie sposób było odtworzyć toku myśli badanych; byli to badani numer 4, 6, 14 i 16). Osoby badane to głównie studenci I roku psychologii. Nie jest to jednak znaczące ograniczenie badań. Nie ma podstaw, by twierdzić, że studenci psychologii wyróżniają się pod kątem twórczości matematycznej na tle innych grup czy populacji. Zdolności matematyczne nie są czynnikiem uwzględnianym podczas rekrutacji na ten kierunek studiów.

Do sprawdzenia efektu eksperymentalnego grupa kontrolna liczyła 34 osoby, a grupa eksperymentalna 36 osób. Wśród badanych z grupy kontrolnej znalazło się 26 kobiet (76%), 8 mężczyzn i 0 osób innej płci. W grupie eksperymentalnej było 24 kobiety (67%), 8 mężczyzn (22%) i 4 osoby innej płci (11%). Średnia wieku badanych wyniosła 21,40 lat ($SD = 6,53$) w grupie kontrolnej i 20,03 ($SD = 1.30$) lat w grupie eksperymentalnej. Mediana policzona z tego, ile lat temu badani pisali ostatni raz maturę z matematyki, wynosiła w obu grupach 1 rok. Grupy są więc podobne.

Do testowania hipotez wzięto 39 osób; w tym 28 kobiet (72%), 11 mężczyzn (28%) i 4 osoby innej płci (10%). Średnia wieku badanych wyniosła w 20,03 lat ($SD = 1,49$). Tylko trzy osoby zadeklarowały studia o kierunkach ściśle związane z matematyką (2 finanse i rachunkowość, 1 informatyczne systemy automatyki). Pozostałe osoby studiowały psychologię (25 osób), lingwistykę lub kognitywistkę komunikacji (4 osoby), kierunki filologiczne (3 osoby), grafikę lub komunikację wizerunkową (2 osoby), prawo (1 osoba), studia azjatyckie (1 osoba) i stosunki gospodarcze (1 osoba). Pozwala to sądzić, że większość osób ostatni kontakt z matematyką miała w szkole średniej. Badani deklarowali, że: 23 osoby pisały ostatni raz maturę z matematyki rok temu, 10 osób pisało ją 2 lata temu, 4 osoby zdawały ją 3 lata temu i 3 osoby 4 lata temu, 1 osoba 5 lat temu i jedna 6 lat temu, 1 osoba była przed maturą. Badani pochodzą z miejscowości różnej wielkości: 12 osób uczęszczało do szkoły średniej w miejscowości powyżej 500 000 mieszkańców, 15 osób do szkoły w miejscowości między 100 000 a 500 000 mieszkańców, 16 osób z mniejszych miejscowości.

4.3. Procedura badania

Badani byli przydzieleni podczas rekrutacji do grupy eksperymentalnej lub do grupy kontrolnej. Osoby badane z grupy eksperymentalnej wypełniały zgodę na udział w badaniu oraz zgodę na nagrywanie wypowiedzi i przetwarzanie ich wypowiedzi. Następnie zapoznawano ich z procedurą głośnego myślenia (*thinking-aloud*). Używa się jej w badaniach eksploracyjnych (zob. np. Gilhooly i in., 2007). Polega ona na tym, że badani przez cały czas rozwiązywania przedstawionego im zadania wypowiadają swoje myśli na głos. Użyłem przetłumaczonej instrukcji tej procedury podanej przez Ericssona i Simona (1993). Badani mieli dwa zadania (dostępne w aneksie 2 w oryginale i tłumaczeniu na angielski); jedno z geometrii płaskiej z przeznaczonymi do niego kartami wzorów¹ oraz zadanie z rachunku prawdopodobieństwa. Badani rozwiązywali pierwsze zadanie przez 15 minut z poleceniem, żeby cały ten czas szukali nowych rozwiązań, nawet jeśli już uda im się uzyskać wynik. Na drugie zadanie przeznaczono 10 minut i ponownie rozwiązywali je nie do uzyskania wyniku lecz do upłynięcia czasu. Na końcu badani podawali dane demograficzne.

W grupie kontrolnej badani mieli takie samo zadanie z tą różnicą, że nie wypowiadali na głos swoich myśli, a ich instrukcja podkreślała, żeby zapisywali wszystkie pomysły na kartkach (ponieważ to na ich podstawie liczone miary twórczości do porównania między grupami). Z pragmatycznych powodów badani w grupie kontrolnej wypełniali badanie w grupie podczas gdy osoby z grupy eksperymentalnej pracowały samodzielnie.

Wszystkie dane demograficzne oraz dane do analizy w grupie kontrolnej badani zapisywali na kartkach. Ich skany są dostępne do wglądu w bazie *OSF*². W grupie eksperymentalnej zgody oraz dane demograficzne były podawane przez *Formularze Google*, dane do porównania z grupą kontrolną badani zapisywali na kartkach, a dane do analizy wypowiadali na głos, co było nagrywane przez eksperymentatora. Skany tych zapisków oraz transkrypcje z nagrań (w oryginale i tłumaczeniu) są dostępne pod wcześniej podanym linkiem. Same nagrania są przechowywane przez autora badania, lecz nie są udostępnione ze względu na to, że zawierają niezanonimizowane dane.

¹ Wzory podane: wzór na wysokość trójkąta równobocznego, wzór wynikający z twierdzenia Pitagorasa oraz zasady podobieństwa trójkątów; wszelkie materiały dostępne w *OSF*.

² https://OSF.io/trsbx/?view_only=cc17ac50316044d08aec747a2b4dc0c9

Następnie odbyły się dwie ewaluacje sędziów kompetentnych, dotyczyły one kolejno strategii metapoznawczych oraz oceny oryginalności i giętkości myślenia. W pierwszej kolejności sędziowie otrzymali 3 transkrypcje i zostali poproszeni o wypisanie z nich cytatów, w których badani wypowiadali pomysły na rozwiązanie zadania. Następnie sędziowie zaznaczali, którą strategią metapoznawczą dany pomysł został wygenerowany. To zadanie sędziowie wykonywali według instrukcji, w której znalazły się definicje wzięte z tekstu Gilhooly’ego i współpracowników (2007), typowe przykłady z zadania *alternative uses task* oraz przykłady matematyczne. Spójność kategoryzacji sędziów była jednak niezadowalająca (między 43% a 60% zgodnych odpowiedzi). Dlatego instrukcję wzbogaciłem o bardziej szczegółowe wytyczne i oddałem ponownie do oceny. Zgodność sędziów wyniosła odpowiednio 83%, 83%, 75%, 86%, 65% i 79% dla cytatów z różnych zadań. Nie znalazłem też zależności między strategią przypisaną pomysłowi a tym, który sędzia oceniał ją przydzielając ($\chi^2(29) = 20.796, p = .866$). Dlatego uznałem wyniki za satysfakcjonujące. Druga ewaluacja sędziów kompetentnych dotyczyła oryginalności i giętkości myślenia. Sędziowie tym razem dostali gotowych 50 cytatów z zadań geometrycznych i 50 cytatów z zadań z prawdopodobieństwa oraz instrukcję. Następnie dwa moduły sztucznej inteligencji zostały wytrenowane na podstawie ocen sędziów, instrukcji i artykułów naukowych odpowiednio do przyporządkowywania cytatów do strategii metapoznawczych oraz do oceny ich oryginalności (pliki, na których szkolono algorytm dostępne są w bazie *OSF*). Dane zebrano i poddano analizie.

4.4. Metody

Ostateczny zbiór cytatów z transkrypcji, gdzie badani podawali pomysły na rozwiązanie zadania, przygotował przygotowany do tego algorytm w technologii *Chat GPT-4*. Program zwracał uwagę na to, żeby zbierane cytaty nie odzwierciedlały tego, jak badany czyta polecenie albo kartę wzorów. Został też poinstruowany, jak nie wypisywać wypowiedzi o charakterze didaskaliów. Oczywiście algorytm popełnia błędy i niektóre cytaty należałoby usunąć. Jednak jego trafność jest zadowalająca, a biorąc pod uwagę liczbę 1118 fragmentów, które skompletowałem przy pomocy tego narzędzia, jest to mankament do przyjęcia.

Tak zebrane cytaty również algorytm przyporządkowywał do metapoznawczych strategii generowania pomysłów. Bazował na specjalnie przygotowanych instrukcjach, ocenach sędziów kompetentnych i artykule naukowym Gilhooly’ego i współpracowników (2007).

Trafność algorytmu jest dość zadowalająca, zgodność z ocenami sędziów wynosi 52,5%. Nie ma też wyraźnego związku pomiędzy przydzieloną do pomysłu strategią a tym, czy ocenił to sędzia kompetentny czy program ($\chi^2(4) = 8.721; p = .068$). Algorytm miał do wyboru 4 strategie wymienione przez Gilhooly'ego i współpracowników (2007) oraz kategorię inne. Szukanie w pamięci było przypisywane wtedy, kiedy ktoś wprost odnosił się do pamięci, używał odpowiedniej formy gramatycznej (np. czas przeszły: *to się robiło*), sam sobie proponował użycie jakiejś strategii (*może Pitagorasem?*) albo mówił o szkolnych metodach (konkretnie: mnożenie na krzyż, tabelka do prawdopodobieństwa, drzewko do prawdopodobieństwa, *na piechotę* i *na logikę*, trójkąt charakterystyczny 30°, 60°, 90°). Użycie własności było przypisywane wtedy, kiedy cytował odwoływał się do konkretnej własności figury, kości lub sytuacji losowej. Rozkład przedmiotu na części był przypisywany wtedy, kiedy w jasny sposób się dzieliło na części figurę lub sytuację losową (rozbiór na możliwości nie przy pomocy szkolnej metody, ale przez analizę sytuacji losowej). Odnoszenie danego przedmiotu do szerszej kategorii było zaznaczane, kiedy ktoś przekształcał równanie, podpisywał wartości niewiadomymi, wielomianami lub jednomianami albo podstawiał wartości pod wzór. Kategoria inne była przypisywana takim strategiom jak zapisywanie, rysowanie, zaznaczanie, podkreślanie, używanie kolorów, używanie karty wzorów (algorytm został nauczony tego, co w karcie się znajdowało).

Twórczość matematyczną zmierzono za Kattou i współpracownikami (2013) przy pomocy płynności i giętkości myślenia oraz oryginalności pomysłów. Trafność tych miar obrazuje macierz korelacji przedstawiona na tabeli 1. Miary płynności i giętkości mają silne umiarkowane związki ze sobą. Nie wykazano związku między oryginalnością a resztą miar twórczości.

Płynność obliczono potrójnie. Płynność w obu zadaniach to łączna liczba pomysłów wypowiedzianych przez osobę badaną. Płynność w zapiskach została policzona analogicznie na podstawie tego, co badani zostawili na kartkach. Jest to jedyna zmienna, która została policzona dla obu warunków badania. Natomiast płynność w obrębie zadania to liczba pomysłów, które badany wypowiedział w danym zadaniu.

Giętkość myślenia została zmierzona inaczej niż opisałem to w prerejestracji. Spójność ocen sędziów kompetentnych była przeciętna ($\alpha = .525$). Mimo treningu algorytm nie nauczył się dobrze ewaluować tę zmienną. Korelacja jego not z niektórymi sędziami była wprost ujemna. Dlatego giętkość policzyłem jako liczbę zmian strategii metapoznawczych w ciągu zadania.

Tabela 1.
Korelacje pomiędzy miarami twórczości matematycznej

	Płynność w obu zadaniach	Płynność w obrębie zadania	Giętkość myślenia	Oryginalność
Płynność w obu zadaniach	—			
Płynność w obrębie zadania	0.657***	—		
Giętkość myślenia	0.306***	0.596***	—	
Oryginalność	0.022	0.032	-0.029	—

*** $p < .001$

Algorytm oceniał także oryginalność — nauczony na podstawie ocen sędziów kompetentnych oraz mając wgląd w pełną listę 1118 pomysłów. Spójność samych sędziów wynosiła $\alpha = .714$, natomiast dodając do tego oceny czata uzyskuje się wartość $\alpha = .708$ (algorytm jest tu czwartym sędzią włączonym do analizy), a jego korelacje z ocenami sędziów wahają się między $\rho = .196$ a $\rho = .371$. Tę umiarkowaną zgodność można tłumaczyć tym, że program zapoznał się ze wszystkimi 1118 pomysłami, a sędziowie z zaledwie 100 z nich — co w ocenie oryginalności ma znaczenie. Uznaję tę zgodność za dostateczną, choć analizując wyniki należy pamiętać o tym ograniczeniu.

5. Wyniki

5.1. Dane opisowe i interkorelacje

Dane opisowe oraz macierz korelacji zmiennych ilościowych przedstawiam w tabeli 2. Interkorelacje tych zmiennych zostały już opisane powyżej i zobrazowane w tabeli 1. Z kolei tabela 3. przedstawia liczebność poszczególnych metapoznawczych strategii generowania pomysłów. Ponieważ w każdej z niżej opisanych analiz statystycznych przynajmniej jedna zmienna łamie założenie o normalności rozkładu, za każdym razem wybierałem nieparametryczne wersje testów.

Tabela 2.
Dane opisowe zmiennych ilościowych

	Płynność w obu zdaniach	Płynność w obrębie zadania	Giętkość myślenia	Oryginalność
<i>N</i>	1118,00	1118,00	1118,00	1118,00
Średnia	29,200	14,900	9,020	1,810
Odchylenie st.	3,750	2,820	2,690	0,868
Minimum	16,000	6,000	2,000	1,000
Maksimum	36,000	22,000	14,000	5,000
Skośność	-0,536	-0,068	-0,381	1,140
Błąd st. skośności	0,073	0,073	0,073	0,073
Kurtoza	0,710	-0,112	-0,034	1,460
Błąd st. kurtozy	0,146	0,146	0,146	0,146
<i>W</i> Shapiro-Wilka	0,957***	0,977***	0,969***	0,794***

*** $p < .001$

Tabela 3.
Liczebność metapoznawczych strategii generowania pomysłów

Strategia	Liczebności	% całości	% skumulowany
1	198	17.7%	17.7%
2	240	21.5%	39.2%
3	64	5.7%	44.9%
4	359	32.1%	77.0%
5	257	23.0%	100.0%

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

5.2. Testowanie różnic między warunkami badania

W celu sprawdzenia tego, czy w grupie eksperymentalnej zaszło zjawisko *overshadowingu* podczas myślenia na głos, dokonałem kilku analiz. Porównałem płynność w zapiskach badanych w obu grup testem *U* Manna-Whitneya, nie znajdując różnic między nimi ($U = 558$; $p = .528$). Można więc sądzić, że mówienie na głos nie wpłynęło na wyniki. Należy jednak traktować te wyniki z pewną ostrożnością. Płynność w zapiskach okazała się zmienną niezwiązaną z płynnością policzoną na podstawie samych wypowiedzi. Korelacja rang Spearmana dla płynności w zapiskach i płynności (obliczonej z nagrań) nie była istotna statystycznie ($\rho = .199$; $p = .138$).

5.3. Metapoznawcze strategie generowania pomysłów

W celu sprawdzenia różnic pomiędzy strategiami w poziomie twórczości pomysłów, które wygenerowały, użyłem analizy Kruskala-Wallisa. Ponieważ te zależności w dużym stopniu były moderowane przez typ zadania, od razu będę osobno je opisywał. Wszystkie ogólne wyniki z analiz Kruskala-Wallisa zebrałem w tabeli 4. Wynika z nich to, że w zadaniu geometrycznym znalazłem umiarkowane różnice pomiędzy strategiami metapoznawczymi w zakresie oryginalności (por. tabela 4.). W zadaniu z prawdopodobieństwem do tych różnic dochodzą też małe różnice w płynności myślenia (por. tabela 4.). Dla bardziej szczegółowego obrazu przeprowadziłem analizę *post-hoc*, uzyskując następujące wyniki. W geometrii oryginalność strategii odniesienia do szerszej kategorii była istotnie wyższa względem dowolnej innej strategii (wyjąwszy strategię podziału przedmiotu na części). Innych istotnych różnic nie ma w tym zadaniu. W przypadku zadania z prawdopodobieństwa strategia użycia własności była mniej oryginalna od wszystkich innych strategii bez wyjątku i były to jedyne istotne różnice. W zadaniu z prawdopodobieństwa w analizie wyszło także to, że strategia rozdzielania przedmiotu miała przydzielony istotnie mniejszy poziom płynności zadania w porównaniu do strategii odniesienia do szerokich kategorii oraz do innych strategii. Średnie użyte do tych porównań *post-hoc* przedstawiają tabele 5., 6. i 7.

Tabela 4.

Różnice pomiędzy metapoznawczymi strategiami generowania pomysłów a miarami twórczości tych pomysłów

		χ^2	df	ε^2
Wyniki ogólne na podstawie obu zadań	Płynność myślenia w zadaniu	19,2***	4	0.017
	Giętkość myślenia	8,050	4	0.007
	Oryginalność	15.36**	4	0.014
Wyniki dla zadania geometrycznego	Płynność myślenia w zadaniu	5,440	4	0.010
	Giętkość myślenia	7,530	4	0.013
	Oryginalność	37.16***	4	0.065
Wyniki dla zadania z prawdopodobie ństwem	Płynność myślenia w zadaniu	13.58**	4	0.025
	Giętkość myślenia	6,220	4	0.011
	Oryginalność	44.48***	4	0.082

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Tabela 5.

Średnie i odchylenia standardowe oryginalności dla poszczególnych strategii w zadaniu geometrycznym

Strategia	<i>N</i>	Średnia	Odczylenie st.
1	116	1,690	0,762
2	165	1,880	0,837
3	5	3,000	1,220
4	173	2,160	0,831
5	113	1,770	0,802

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

Tabela 6.

Średnie i odchylenia standardowe oryginalności dla poszczególnych strategii w zadaniu z rachunku prawdopodobieństwa

Strategia	<i>N</i>	Średnia	Odchylenie st.
1	82	1,880	1,020
2	75	1,230	0,481
3	59	1,920	0,651
4	186	1,620	0,850
5	144	1,880	0,986

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

Tabela 7.

Średnie i odchylenia standardowe płynności w obrębie zadania dla poszczególnych strategii w zadaniu z rachunku prawdopodobieństwa

Strategia	<i>N</i>	Średnia	Odchylenie st.
1	82	14,500	2,880
2	75	15,100	3,160
3	59	13,600	2,420
4	186	14,800	2,750
5	144	14,900	3,190

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

Sprawdziłem również efekt kolejności, tj. czy pewne strategie występują wcześniej niż inne. Żeby tego dokonać, stworzyłem nową zmienną. Ponumerowałem wszystkie pomysły w obrębie poszczególnych zadań w takiej kolejności, w jakiej te pomysły zostały wypowiedane. Te liczby wziąłem jako zmienną zależną do analizy Kruskala-Wallisa, a strategie metapoznawcze jako zmienną grupującą. Wynik okazał się pozytywny, a różnice umiarkowanie duże³ — zarówno w zadaniu geometrycznym ($\chi^2(4) = 48.1$; $p < .001$; $\epsilon^2 = .084$), jak i w zadaniu z prawdopodobieństwem ($\chi^2(4) = 30.0$; $p < .001$; $\epsilon^2 = .055$). Szczegółowe porównania *post-hoc* między parami strategii przedstawiały jednak inny wzór w obu zadaniach. W geometrii strategia odniesienia do szerszej kategorii była używana w istotny sposób później w zadaniu niż strategia pamięciowa ($W = 5.118$; $p = .003$), użycia własności ($W = 8.267$; $p < .001$) i innych strategii ($W = 7.636$; $p < .001$). W prawdopodobieństwie strategia użycia

³ Interpretuję statystykę ϵ^2 za Rea i Parker (1992).

własności była istotnie wcześniej stosowana od strategii podzielenia przedmiotu ($W = 5.101$; $p = .003$), odniesienia do szerszej kategorii ($W = 6.833$; $p < .001$) i innych strategii ($W = 5.762$; $p < .001$). Dodatkowo strategia pamięciowa pojawiała się wcześniej niż strategia odniesienia do szerszej kategorii. Średnie użyte do tych porównań *post-hoc* przedstawiają tabele 8. i 9.

Sprawdziłem też związek pomiędzy oryginalnością a kolejnością pomysłów w obrębie zadań, ponieważ teoria (Shaw i in., 2024) zakładała, że im późniejsze pomysły, tym bardziej oryginalne. Biorąc pod uwagę wszystkie wyniki, korelacja wynosiła $\rho = .208$; $p < .001$, w samej geometrii wyniosła $\rho = .229$; $p < .001$, a w zadaniu z prawdopodobieństwem osobno wyniosła $\rho = .181$; $p < .001$. Zatem niezależnie od typu zadania można zaobserwować ten związek.

Tabela 8.

Średnie i odchylenia standardowe kolejności dla poszczególnych strategii w zadaniu geometrycznym

Strategia	<i>N</i>	Średnia	Odchylenie st.
1	116	8,030	4,360
2	165	7,190	4,270
3	5	6,400	2,300
4	173	9,900	4,020
5	113	6,720	5,490

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

Tabela 8.

Średnie i odchylenia standardowe kolejności dla poszczególnych strategii w zadaniu z rachunkiem prawdopodobieństwa

Strategia	<i>N</i>	Średnia	Odchylenie st.
1	82	6,820	4,340
2	75	5,720	4,590
3	59	8,390	4,330
4	186	8,270	3,890
5	144	8,730	5,130

1. Wywołanie z pamięci; 2. Użycie własności; 3. Podział przedmiotu na części; 4. Odniesienie do szerszej kategorii; 5. Inne strategie.

5.4. Dodatkowe analizy o charakterze eksploracyjnym

Nie przedstawiałem żadnych hipotez dotyczących zależności pomiędzy danymi demograficznymi a zmiennymi użytymi w badaniu. Jednak z własnej ciekawości przeprowadziłem analizy, żeby wyeksplorować tę tematykę.

Chcąc sprawdzić różnice międzypłciowe, przeprowadziłem test U Manna-Whitneya na miarach twórczości matematycznej. Ze względu na niedostateczną liczbę osób badanych, którzy zadeklarowali inną płć niż kobieta czy mężczyzna (4 osoby), analizę różnic międzypłciowych przeprowadziłem jedynie na tych dwóch płciach. Nie znalazłem żadnych istotnych statystycznie różnic.

W kolejnym kroku wyeksplorowałem to, czy miejsce, gdzie badani odbierali naukę matematyki ma znaczenie dla miar twórczości matematycznej. W tym celu przeprowadziłem analizę Kruskala-Wallisa. Znalazłem różnice w poziomie twórczości matematycznej pomiędzy badanymi, którzy uczęszczali do szkół w miejscowościach o różnej liczbie mieszkańców. Małe różnice dotyczyły płynności myślenia w zadaniu ($\chi^2(2) = 26.99$; $p < .001$; $\epsilon^2 = .002$). Najwyższe wskaźniki tej miary twórczości matematycznej osiągnęli studenci z małych miejscowości (mniejszych niż 100 000 mieszkańców), istotnie wyższe od studentów z miejscowości średnich (między 100 000 i 500 000 mieszkańców) i dużych (powyżej 500 000 mieszkańców). Między tymi dwoma ostatnimi grupami nie ma istotnych różnic w zakresie tej cechy. Dodatkowo wystąpiły małe różnice w zakresie giętkości myślenia ($\chi^2(2) = 19.84$; $p < .001$; $\epsilon^2 = .018$). Tutaj ponownie najwyższy poziom wykazali studenci z małych miejscowości. Różnice w oryginalności nie osiągnęły poziomu istotnego statystycznie.

Na końcu sprawdziłem związek pomiędzy wiekiem a płynnością myślenia w zadaniu oraz z oryginalnością — ze skutkiem negatywnym. Podobny brak związku pojawił się w przypadku liczby lat osób badanych od ostatniej matury z matematyki. W przypadku giętkości pojawiły się jednak dodatnie, słabe korelacje rang Spearmana pomiędzy wiekiem a giętkością myślenia ($\rho = .073$; $p < .014$) oraz pomiędzy liczbą lat od ostatniej matury z matematyki badanych a giętkością myślenia ($\rho = .127$; $p < .001$).

6. Dyskusja

Przeprowadzone badanie miało na celu eksplorację metapoznawczych strategii generowania pomysłów w zadaniach matematycznych i ich związków z miarami twórczości matematycznej. Odniosłem się do badań Gilhooly'ego i współpracowników (2007), w których autorzy wyszczególniali takie strategie metapoznawcze jak wywołanie z pamięci, wykorzystanie własności, podział przedmiotu na części i odniesienie do szerszej kategorii. W moim badaniu ze względu na specyfikę procesu rozwiązywania zadania, dodałem kategorię innych strategii, gdzie przede wszystkim znalazły się zapisywanie danych, oznaczanie, rysowanie, używanie karty wzorów. W badaniu, na którym się wzorowałem, nie trzeba było rysować sobie sytuacji problemowej ani zaglądać do pomocy naukowej, ponieważ badano tam ogólną twórczość (*domain-general creativity*). Badani mieli za zadanie znaleźć jak najwięcej zastosowań dla przedmiotów codziennego użytku. Z tej różnicy powstał pomysł na dodanie nowej kategorii. Udało się w dużym stopniu jednoznacznie przyporządkować pomysły na rozwiązanie zadania do strategii metapoznawczych, które je wygenerowały.. Także fakt, że algorytm sztucznej inteligencji z umiarkowanym sukcesem poprawnie przypisał pomysły do strategii, obrazuje to dopasowanie teorii do danych. Sądzę jednak, że o ile da się przyporządkować te cztery strategie opisane przez Gilhooly'ego i współpracowników (2007) do wyników, o tyle można ułożyć listę strategii bardziej odpowiadających matematycznej empirii. Po pierwsze dlatego, że pierwsza próba kategoryzacji pomysłów według strategii zakończyła się miernym wynikiem (między 43% a 60% zgodności pomiędzy sędziami kompetentnymi). Sami sędziowie skarżyli się, że niektóre pomysły równie dobrze mogą pasować do dwóch lub nawet trzech kategorii zależnie od interpretacji. To właśnie bardzo dokładny klucz interpretacyjny, który konkretniej opisywał grupy pomysłów (jak np. podstawianie pod wzór, używanie szkolnych metod), sprawił, że dało się przyporządkować teorię do danych. O ile ten klucz był zgodny z opisem dostarczonym przez autorów badania, które replikuję, o tyle był stopniem pośrednim między danymi a teorią. Po drugie okazało się, że związek pomiędzy strategiami metapoznawczymi a miarami twórczości zależy jeszcze od typu zadania w bardzo szczególny sposób. W geometrii strategia odniesienia do szerszej kategorii zarówno dawała najbardziej oryginalne pomysły, jak i najpóźniej się pojawiała — w porównaniu do wszystkich strategii z wyjątkiem podziału na części. Innych różnic nie było. Jest to obraz jednoznaczny, jeśli weźmie się pod uwagę to, że późniejsze pomysły są bardziej oryginalne. W prawdopodobieństwie na podobnej zasadzie strategia używania własności była wcześniej używana i mniej oryginalna od wszystkich innych. Skoro różnie działają strategie metapoznawcze w obrębie samej matematyki, sądzą, że tym bardziej w różnych dziedzinach

twórczości mogą występować różnice. Ciekawym odkryciem tutaj było to, że inaczej niż u Gilhooly'ego, strategia używania pamięci nie była pierwsza w żadnym z zadań. O ile przy wymyślaniu zastosowań dla obiektów codziennych pierwsze pomysły, które się nasuwają, są z pamięci, w matematyce nie ma to miejsca. Zatem nie do końca prawdziwym jest, że jest to ogólna własność procesu twórczego, ponieważ zależy od tego, jak skonstruowane jest zadanie. W innych badaniach właśnie to różniło grupę kontrolną i grupę specjalnie szkolonych uczniów pod kątem metapoznania w matematyce, że ci drudzy rozwiązywali zadanie raczej poprzez szukanie tego, co w zadaniu wygląda znajomo (Mevarech i Amrany, 2008). Grupa zwykłych uczniów w znacznej większości próbowała taktyki zrozumienia problemu i wypisania sobie danych (Mevarech i Amrany, 2008). Szukanie cech podobnych do tych zadań, które już znają to strategia wykorzystania własności, wypisywanie sobie danych to strategia z kategorii innych, a próba zrozumienia zadania może wiązać się z wywoływaniem z pamięci jakichś pojęć i zależności matematycznych.

Dane i badania, które tu zebrałem, myślę, że są przekonującym obrazem tego, jak metapoznawcze strategie, a zatem aparat kontroli metapoznawczej, silnie zależą metapoznawczej wiedzy na poziomie zadania oraz od jego afordancji (Gibson, 1979). Zgodnie z modelem (Lebuda i Benedek, 2023) komponenty twórczego metapoznania silnie na siebie oddziałują, tworząc strukturę bardzo dynamiczną i — można powiedzieć — zestaw naczyń połączonych. Metapoznawcza kontrola nie działa w próżni, bo zasila ją wiedza metapoznawcza. O ile więc czynności poznawcze są te podobne w każdym procesie poznawczym (Weisberg, 1986, za: Nęcka, 2001), o tyle czynności metapoznawcze, używane strategie, dostosowują się do warunków zadania dzięki metapoznawczym monitorowaniu i wiedzy na poziomie zadania. W przypuszczalnie każdym procesie twórczym generuje się struktury przedtwórcze oraz eksploruje się ich zastosowania a także interpretuje ich znaczenie (Finke i in., 1992). Autorzy tej konceptualizacji podkreślają, że pod te czynności da się podłożyć różne konkretne ujęcia i przedmioty (Finke i in., 1992). Czynności poznawcze przyjmą zatem dużo różnorodnych elementów, ale to, jak nimi pokierować, czyli czynności metapoznawcze, one już zależą od zadań, które dają różne afordancje (Gibson, 1979). Pewne czynności są możliwe w jednym zadaniu, a niemożliwe w innym.

Kolejną replikację uzyskał też związek mówiący o tym, że im późniejsze pomysły tym co do zasady są lepsze. Niestety ze względu na to, że oryginalność oceniał dość mylny algorytm, a nie człowiek (który miał niskie korelacje z ocenami sędziów kompetentnych), nie zdecydowałem się sprawdzić, czy ten związek jest sześcienny, jak wcześniej to propagowano

(Shaw i in., 2024). Testowanie tego, czy zależność jest sześcienna czy kwadratowa, jest bardzo dokładną analizą, dlatego wymaga dokładnych danych. Wobec tego, że oryginalność oceniał program z umiarkowaną trafnością, a także tego, że tak mierzona oryginalność nie miała związków z innymi miarami twórczości, sądzę, że moje dane nie są dostatecznie precyzyjne do przeprowadzenia tej analizy.

Ograniczeniem badania jest zdecydowanie fakt, że wiele zmiennych oceniał algorytm — i pomimo bardzo rzetelnych ocen sędziów kompetentnych, na których był szkolony, jego oceny miały umiarkowaną trafność. Niestety przy tak dużej ilości danych była to jednak konieczność. Próba użyta w badaniu nie reprezentowała żadną konkretną grupę społeczną, więc dane nie odzwierciedlają na przykład populacji uczniów czy studentów matematyki. Osoby badane były różnej płci, pochodziły w równym stopniu z dużych, średnich i małych miejscowości i nie ma podstaw, by sądzić, że wyróżniały się pod kątem zdolności matematycznych od ogółu populacji. Reprezentowały jednak ogół studentów niezwiązanych szczególnie z matematyką, a ekstrapolacja danych na bardziej konkretne grupy społeczne może mijać się z faktycznymi parametrami danych populacji.

Dalsze badania mogą pogłębić temat zależności pomiędzy używanymi strategiami metapoznawczymi a zadaniami z różnych dziedzin twórczości. Brakuje wiedzy na temat związku twórczych strategii metapoznawczych a osiągnięciami w matematyce — dopełniłoby to obraz badań nad metapoznaniem matematycznym (bez nacisku na twórczość matematyczną), które od kilkunastu lat prowadzi Zemira Mevarech ze współpracownikami (por. Mevarech, 1999; Mevarech i Amrany, 2008; Mevarech i Fan, 2018; Mevarech i Kramarski, 2003). Można też stworzyć i zweryfikować dokładniejszą listę metapoznawczych strategii generowania rozwiązań w zadaniach matematycznych. Z mojego badania wynika, że da się wytworzyć specyficzną listę strategii tylko do zadań matematycznych — niestety wydaje się, że lista byłaby zależna od działu matematyki (inne wyniki uzyskałem dla geometrii i inne dla zadań z prawdopodobieństwa).

7. Bibliografia

- Ackerman, R., & Thompson, V. (2014). *Meta-Reasoning: What Can We Learn from Meta-Memory?*
- Balka, D. S. (1974). Using research in teaching: Creative ability in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 21(7), 633–636. <https://doi.org/10.5951/AT.21.7.0633>
- Beaty, R. E., & Silvia, P. J. (2012). Why do ideas get more creative across time? An executive interpretation of the serial order effect in divergent thinking tasks. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 6(4), 309–319. <https://doi.org/10.1037/a0029171>
- Benedek, M., & Lebuda, I. (2024). Managing Your Muse: Exploring Three Levels of Metacognitive Control in Creative Ideation. *Creativity Research Journal*, 1–12. <https://doi.org/10.1080/10400419.2024.2347770>
- Ceh, S. M., Edelmann, C., Hofer, G., & Benedek, M. (2022). Assessing Raters: What Factors Predict Discernment in Novice Creativity Raters? *The Journal of Creative Behavior*, 56(1), 41–54. <https://doi.org/10.1002/jocb.515>
- de Vink, I. C., Willemsen, R. H., Lazonder, Ard. W., & Kroesbergen, E. H. (2022). *Creativity in mathematics performance: The role of divergent and convergent thinking*. 92, 484–501. <https://doi.org/10.1111/bjep.12459>
- Desender, K., & Sasanguie, D. (2022). Math anxiety relates positively to metacognitive insight into mathematical decision making. *Psychological Research*, 86(3), 1001–1013. <https://doi.org/10.1007/s00426-021-01511-8>
- Efklides, A. (2008). Metacognition. *European Psychologist*, 13(4), 277–287. <https://doi.org/10.1027/1016-9040.13.4.277>
- Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*. The MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/5657.001.0001>
- Finke, R. A. (1990). *Creative imagery: Discoveries and inventions in visualization* (s. ix, 188). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Finke, R. A., Smith, S. M., & Ward, T. B. (1992). *Creative Cognition: Theory, Research, and Applications* (1st pbk. ed). A Bradford Book.
<https://research.ebsco.com/linkprocessor/plink?id=679775c8-285b-34c7-8809-db72b9922665>
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906–911.
<https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906>
- Fleck, L. (1986). Powstanie i rozwój faktu naukowego: Wprowadzenie do nauki o stylu myślowym i kolektywie myślowym. *Wydawnictwo Lubelskie*.
- Folkerts, M., Fraser, C. G., Gray, J. J., Berggren, J. L., Knorr, W. R., Doshi, A., Abhinav, V., Bhatya, P., Gaur, A., Gregersen, E., Higgins, J., Jain, P., Hosch, W. L., Liesangthem, L., Lotha, G., Mahajan, D., Pallardy, R., Rodriguez, E., Sampaolo, M., Setia, V., Shukla, G. (2024, 5 marca). *Encyclopedia Britannica*.
<https://www.britannica.com/science/mathematics>
- Gibson, J. J. (1979). *The Theory of Affordances: W The People, Place, and Space Reader*. Routledge.
- Gilhooly, K. J., Fioratou, E., Anthony, S. H., & Wynn, V. (2007). Divergent thinking: Strategies and executive involvement in generating novel uses for familiar objects. *British Journal of Psychology*, 98(4), 611–625. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.2007.tb00467.x>
- Haavold, P. Ø. (2018). An empirical investigation of a theoretical model for mathematical creativity. *The Journal of Creative Behavior*, 52(3), 226–239.
<https://doi.org/10.1002/jocb.145>
- Haylock, D. (1984). *Aspects of mathematical creativity in children aged 11–12*. King's College London. <https://kclpure.kcl.ac.uk/portal/en/studentTheses/aspects-of-mathematical-creativity-in-children-aged-11-12>

- Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59–74.
<https://doi.org/10.1007/BF00367914>
- Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, 29(3), 68–74. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y>
- Hong, E., & Aquí, Y. (2004). Cognitive and Motivational Characteristics of Adolescents Gifted in Mathematics: Comparisons Among Students With Different Types of Giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 48(3), 191–201.
<https://doi.org/10.1177/001698620404800304>
- Imai, T. (2000). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(2), 187–193. <https://doi.org/10.1080/002073900287246>
- Jia, X., Xu, T., & Zhang, Y. (2022). The Role of Metacognitive Strategy Monitoring and Control in the Relationship between Creative Mindsets and Divergent Thinking Performance. *Journal of Intelligence*, 10(2), 35.
<https://doi.org/10.3390/jintelligence10020035>
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM*, 45(2), 167–181.
<https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1>
- Kaufman, J., & Beghetto, R. (2009). Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity. *Review of General Psychology - REV GEN PSYCHOL*, 13.
<https://doi.org/10.1037/a0013688>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.

- Lebuda, I., & Benedek, M. (2023). A systematic framework of creative metacognition. *Physics of Life Reviews*, 46, 161–181. <https://doi.org/10.1016/j.plrev.2023.07.002>
- Lebuda, I., Figura, B., & Karwowski, M. (2021). Creativity and the Dark Triad: A meta-analysis. *Journal of Research in Personality*, 92, 104088. <https://doi.org/10.1016/j.jrp.2021.104088>
- Lebuda, I., Hofer, G., Rominger, C., & Benedek, M. (2024). No strong support for a Dunning–Kruger effect in creativity: Analyses of self-assessment in absolute and relative terms. *Scientific Reports*, 14(1), 11883. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-61042-1>
- Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM*, 45(2), 183–197. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8>
- Lin, C.-Y. (2023). Creative problem-solving ability does not occur by chance: Examining the dynamic system model of creative problem solving ability. *Gifted Education International*, 39(2), 168–182. <https://doi.org/10.1177/02614294221149478>
- Luchins, A. S. (1942). Mechanization in problem solving: The effect of Einstellung. *Psychological Monographs*, 54(6), i–95. <https://doi.org/10.1037/h0093502>
- Mann. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–260. <https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264>
- Mann, E. (2005). Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students. *ETD Collection for University of Connecticut*.
- Mednick, S. (1962). The associative basis of the creative process. *Psychological Review*, 69(3), 220–232. <https://doi.org/10.1037/h0048850>

- Meier, M., Ehrenguber, A., Spitzley, L., Eller, N., Reiterer, C., Rieger, M., Skerbinz, H., Teuschel, F., Wiemer, M., Vogel, S., & Grabner, R. (2024). The prediction of mathematical creativity scores: Mathematical abilities, personality and creative self-beliefs. *Learning and Individual Differences*, 113, 102473.
<https://doi.org/10.1016/j.lindif.2024.102473>
- Metcalf, J., & Finn, B. (2008). Evidence that judgments of learning are causally related to study choice. *Psychonomic Bulletin & Review*, 15(1), 174–179.
<https://doi.org/10.3758/PBR.15.1.174>
- Mevarech, Z. R. (1999). Effects of Metacognitive Training Embedded in Cooperative Settings on Mathematical Problem Solving. *The Journal of Educational Research*, 92(4), 195–205. <https://doi.org/10.1080/00220679909597597>
- Mevarech, Z. R., & Amrany, C. (2008). Immediate and delayed effects of meta-cognitive instruction on regulation of cognition and mathematics achievement. *Metacognition and Learning*, 3(2), 147–157. <https://doi.org/10.1007/s11409-008-9023-3>
- Mevarech, Z. R., & Fan, L. (2018). Cognition, Metacognition, and Mathematics Literacy. W Y. J. Dori, Z. R. Mevarech, & D. R. Baker (Red.), *Cognition, Metacognition, and Culture in STEM Education* (T. 24, s. 261–278). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-66659-4_12
- Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 73(4), 449–471.
<https://doi.org/10.1348/000709903322591181>
- Muncer, G., Higham, P. A., Gosling, C. J., Cortese, S., Wood-Downie, H., & Hadwin, J. A. (2022). A Meta-Analysis Investigating the Association Between Metacognition and

- Math Performance in Adolescence. *Educational Psychology Review*, 34(1), 301–334.
<https://doi.org/10.1007/s10648-021-09620-x>
- Nęcka, E. (2001). *Psychologia twórczości*. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Peskin, J., & Ellenbogen, B. (2019). Cognitive Processes While Writing Poetry: An Expert-Novice Study. *Cognition and Instruction*, 37(2), 232–251.
<https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1570931>
- Puente-Díaz, R. (2023). Metacognitive Feelings as a Source of Information for the Creative Process: A Conceptual Exploration. *Journal of Intelligence*, 11(3), 49.
<https://doi.org/10.3390/jintelligence11030049>
- Reder, L. M., & Ritter, F. E. (1992). What determines initial feeling of knowing? Familiarity with question terms, not with the answer. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 18(3), 435–451. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.18.3.435>
- Runco, M., & Jaeger, G. (2012). The Standard Definition of Creativity. *Creativity Research Journal - CREATIVITY RES J*, 24, 92–96.
<https://doi.org/10.1080/10400419.2012.650092>
- Sady, W. (2010). Kuhn kontra Fleck a Maxwellowska rewolucja w elektrodynamice. *Przegląd Filozoficzny*, 2(74), 103–131.
- Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental Variation in Children's Creative Mathematical Thinking as a Function of Schooling, Age, and Knowledge. *Creativity Research Journal*, 18(3), 279–291. https://doi.org/10.1207/s15326934crj1803_5
- Shaw, S. T., Yeghyayan, A. A., Ballenger, E., & Ramirez, G. (2024). Generating mathematical strategies shows evidence of a serial order effect. *Frontiers in Education*, 9, 1347444. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1347444>

- Tan, A. G., i Sriraman, B. (2017). Convergence in creativity development for mathematical capacity. W: R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and Giftedness* (s. 117–133). Berlin, Germany: Springer.
- van Broekhoven, K., Belfi, B., Borghans, L., & Seegers, P. (2022). Creative idea forecasting: The effect of task exposure on idea evaluation. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 16(3), 519–528. <https://doi.org/10.1037/aca0000426>
- Veenman, M. V. J., & Van Cleef, D. (2019). Measuring metacognitive skills for mathematics: Students' self-reports versus on-line assessment methods. *ZDM*, 51(4), 691–701. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1006-5>
- Wallas, G. (1926). *The art of thought*. Harcourt, Brace and Company.